数理解析研究所講究録 1294 巻 2002 年 141-151

Generalization of the Harish-Chandra Isomorphism

織田 寛 (Hiroshi ODA) *
拓殖大学・工学部 (Faculty of Engineering, Takushoku University)

1 導入

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の半単純 Lie 環とし，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環とする．$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の root 系 Δ の勝手な基 Π を固定し Δ^+ をその基に関する正 root 全体とする．$\mathfrak{g}_\alpha$ を $\alpha \in \Delta$ に対する root 空間とし，$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$，$\overline{\mathfrak{n}} = \sum_{-\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$ とおく．三角分解 $\mathfrak{g} = \overline{\mathfrak{n}}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}$ より得られる普遍包絡環の分解 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{h})\oplus(\overline{\mathfrak{n}}\mathrm{U}(\mathfrak{g})+\mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n})$ に関する射影 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{h})\oplus(\overline{\mathfrak{n}}\mathrm{U}(\mathfrak{g}) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}) \to \mathrm{U}(\mathfrak{h})$ と，$\mathfrak{h}^*$ 上の多項式関数 $\mathcal{P}(\mathfrak{h}^*)$ との同一視のもとでの $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+} \alpha \in \mathfrak{h}^*$ による平行移動：

$$\mathrm{U}(\mathfrak{h}) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*) \ni f(\lambda) \mapsto f(\lambda-\rho) \in \mathcal{P}(\mathfrak{h}^*) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h})$$

を合成した写像 $\gamma : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{S}(\mathfrak{h})$ を Harish-Chandra 写像とよぶ．このとき次の事実は有名：

定理 1.1 (Harish-Chandra 同型). W を $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の Weyl 群，$\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ を $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の中心としたとき，環同型

$$\gamma : \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$$

が成り立つ．

$\mathfrak{g}$ の内部自己同型群 G は $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ に随伴作用で作用するが，$\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ はその単位表現成分 $\mathrm{U}(\mathfrak{g})^G$ に等しい．従って上の同型は $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ の G-単位表現成分と $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ の W-単位表現成分の間の 1 対 1 対応となるが，このような対応を単位表現以外の表現について与えるのが本稿の目的である．

2 Chevalley の制限定理

射影 $\gamma_0 : \mathrm{S}(\mathfrak{g}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \oplus \sum_{\alpha\in\Delta} \mathrm{S}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_\alpha \to \mathrm{S}(\mathfrak{h})$ を Chevalley の制限写像とよぶ．Killing 形式による同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{h}$ により $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{g})$，$\mathrm{S}(\mathfrak{h}) \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{h})$ とみなすと，γ_0 は $\mathfrak{g}$ 上の多項式関数の $\mathfrak{h}$ への制限に他ならない．定理 1.1 はその可換版である次の定理に基づいている：

定理 2.1 (Chevalley の制限定理). 環同型

$$\gamma_0 : \mathrm{S}(\mathfrak{g})^G \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$$

が成り立つ．

以下これにより同一視された 2 つの環を $\mathcal{A}$ と書く．ところで，$\mathcal{H}_G(\mathfrak{g})$ を $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{g})$ 内の G-調和多項式の空間とすると Kostant の定理より G-加群として

$$\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \mathrm{triv}_{\mathfrak{h}}, \qquad \mathrm{S}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{g})^G \otimes \mathcal{H}_G(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{A} \otimes \mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}} \mathrm{triv}_{\mathfrak{h}}$$

*mailto:hoda@la.takushoku-u.ac.jp

となる．従って，(π,V) を G の任意の有限次表現とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_G(V,\mathrm{S}(\mathfrak{g})) &\simeq \mathrm{S}(\mathfrak{g})^G\otimes \mathrm{Hom}_G(V,\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}))\\ &\simeq \mathcal{A}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,\mathrm{Ind}_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\,\mathrm{triv}_{\mathfrak{h}})\\ &\simeq \mathcal{A}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(V|_{\mathfrak{h}},\mathrm{triv}_{\mathfrak{h}})\\ &\simeq \mathcal{A}\otimes (V^{\mathfrak{h}})^*\end{aligned}$$

となる．但し $V^{\mathfrak{h}}$ は V の 0-weight 空間である．これより $\mathrm{Hom}_G(V,\mathrm{S}(\mathfrak{g}))$ は階数が $\dim V^{\mathfrak{h}}$ に等しい自由 $\mathcal{A}$-加群であることが分かる．

一方 $\mathcal{H}_W(\mathfrak{h})$ を $\mathrm{S}(\mathfrak{h})\simeq\mathcal{P}(\mathfrak{h})$ 内の W-調和多項式の空間とすると W-加群として

$$\mathcal{H}_W(\mathfrak{h})\simeq\mathbb{C}[W],\qquad \mathrm{S}(\mathfrak{h})\simeq\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W\otimes\mathcal{H}_W(\mathfrak{h})\simeq\mathcal{A}\otimes\mathbb{C}[W]$$

である．$V^{\mathfrak{h}}$ には自然に W が作用するので，今度は $\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ を考えると

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathrm{S}(\mathfrak{h})) &\simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h})^W\otimes\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathcal{H}_W(\mathfrak{h}))\\ &\simeq\mathcal{A}\otimes\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathbb{C}[W])\end{aligned}$$

となり，$\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ は階数が $\dim\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathbb{C}[W])$ に等しい自由 $\mathcal{A}$-加群であることが分かる．ここで，

$$\dim\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathbb{C}[W])=\dim\mathrm{Hom}_W(\mathbb{C}[W],V^{\mathfrak{h}})=\dim V^{\mathfrak{h}}$$

であるので，抽象的な $\mathcal{A}$-加群として $\mathrm{Hom}_G(V,\mathrm{S}(\mathfrak{g}))$ と $\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ は同型である．次の準同型で 2 つの $\mathcal{A}$-加群を関係付けよう：

定義 2.2. $\mathcal{A}$-準同型 $\Gamma_0^\pi:\mathrm{Hom}_G(V,\mathrm{S}(\mathfrak{g}))\ni\Phi\mapsto\varphi\in\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ を

$$\varphi\ :\ V^{\mathfrak{h}}\hookrightarrow V\xrightarrow{\Phi}\mathrm{S}(\mathfrak{g})\xrightarrow{\gamma_0}\mathrm{S}(\mathfrak{h})$$

で定める．

注意 2.3. $(\pi,V)=(\mathrm{triv},\mathbb{C})$ のとき，$\mathbb{C}^{\mathfrak{h}}=\mathbb{C}$，$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C},\mathrm{S}(\mathfrak{g}))\simeq\mathrm{S}(\mathfrak{g})^G$，$\mathrm{Hom}_W(\mathbb{C},\mathrm{S}(\mathfrak{h}))\simeq\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ であるから，$\Gamma_0^{\mathrm{triv}}=\gamma_0$．つまり，$\Gamma_0^\pi$ は Chevalley の制限写像 γ_0 の自然な拡張である．

以下，Γ_0^π が γ_0 のように同型写像となるのはいつかを調べていく．まず，

命題 2.4. 全ての (π,V) に対して $\Gamma_0^\pi:\mathrm{Hom}_G(V,\mathrm{S}(\mathfrak{g}))\to\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ は単射．

証明の前にいくつか準備をする．$\mathfrak{h}$ を stable にする Cartan involution θ を固定すると，$\mathfrak{u}=\mathfrak{g}^\theta$ は $\mathfrak{g}$ のコンパクト実型となり $\mathfrak{g}=\mathfrak{u}+\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ である．$\mathfrak{t}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{u},\mathfrak{a}=\mathfrak{h}\cap\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ とおく．U,T はそれぞれ G の $\mathfrak{u},\mathfrak{t}$ に対応する部分群とする．U は随伴作用で実線型空間 $\sqrt{-1}\mathfrak{u}$，従ってその上の複素数値多項式関数の空間 $\mathcal{P}(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$ に作用するが，$\mathrm{Hom}_G(V,\mathrm{S}(\mathfrak{g}))\simeq\mathrm{Hom}_U(V,\mathcal{P}(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))$ である．同様に $\mathfrak{a}$ 上の複素数値多項式関数の空間 $\mathcal{P}(\mathfrak{a})$ について $\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathrm{S}(\mathfrak{h}))\simeq\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathcal{P}(\mathfrak{a}))$ である．この同一視のもと Γ_0^π は，$\Phi\in\mathrm{Hom}_U(V,\mathcal{P}(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))$ に

$$\varphi\ :\ V^{\mathfrak{h}}\ni v\mapsto\Phi[v]|_{\mathfrak{a}}\in\mathcal{P}(\mathfrak{a})\tag{2.1}$$

で定まる $\varphi\in\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathcal{P}(\mathfrak{a}))$ を対応させる写像となる．こう見ると多項式関数に限らないいろいろな関数クラス $\mathcal{F}=\mathcal{C},\mathcal{C}^\infty,\mathcal{P},\dots$ に対しても同様に $\Gamma_0^\pi:\mathrm{Hom}_U(V,\mathcal{F}(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))\to\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}},\mathcal{F}(\mathfrak{a}))$ が定義できるが，例えば $\mathcal{F}=\mathcal{C}$（連続関数）の場合に既に Γ_0^π が単射であることを示そう．

$\Gamma_0^\pi : \mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{C}(\sqrt{-1}\mathfrak{u})) \to \mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}, \mathcal{C}(\mathfrak{a}))$ の単射性の証明. $\Phi \in \mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{C}(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$ に対して $\varphi = \Gamma_0^\pi(\Phi)$ とおく. V_μ を V の weight $\mu \in \mathfrak{h}^*$ の weight 空間とする. $\mu \neq 0$ であれば任意の $v \in V_\mu$ に対して $\Phi[v]|_\mathfrak{a} \in \mathcal{C}(\mathfrak{a})$ は値 0 の定値関数である. 何故なら $t \in T, H \in \mathfrak{a}$ とすると $\Phi[v](H) = \Phi[v](\mathrm{Ad}(t^{-1})H) = \Phi[\pi(t)v](H) = \Phi[t^\mu v](H) = t^\mu \Phi[v](H)$ となるからである. 従って射影 $p^\pi : V = V^\mathfrak{h} \oplus \sum_{\mu \neq 0} V_\mu \to V^\mathfrak{h}$ を定めると(2.1) により任意の $v \in V$ に対して $\Phi[v]|_\mathfrak{a} = \Phi[p^\pi[v]]|_\mathfrak{a} = \varphi[p^\pi[v]]$ となる. 任意の $X \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}$ は適当な $H \in \mathfrak{a}, u \in U$ により $X = \mathrm{Ad}(u)H$ と表され,

$$\Phi[v](X) = \Phi[v](\mathrm{Ad}(u)H) = \Phi[\pi(u^{-1})v](H) = \varphi[p^\pi[\pi(u^{-1})v]](H) \tag{2.2}$$

であるから, Φ は φ から完全に再生される. 従って Γ_0^π は単射である. □

各 $\alpha \in \Delta$ に対して root vector $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ を 1 つとって固定する. W-加群 $V^\mathfrak{h}$ は 2 つの部分加群

$$V^\mathfrak{h}_{\mathrm{single}} = \{ v \in V^\mathfrak{h} \ ; \ \pi(X_\alpha)^2 v = 0 \quad \forall \alpha \in \Delta \},$$
$$V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}} = \sum \{ \pi(X_\alpha)^2 V_{-2\alpha} \ ; \ \alpha \in \Delta \}$$

の直和に分解する. これは V 上の U-不変な Hermite 内積に関して, $V^\mathfrak{h}_{\mathrm{single}}, V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}}$ が互いに他の $V^\mathfrak{h}$ 内における直交補空間となることによる. Γ_0^π の像に関して次が分かる :

定理 2.5. $\mathcal{F} = \mathcal{C}$ 又は $\mathcal{C}^\infty$ とする. 任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}/V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}}, \mathcal{F}(\mathfrak{a}))$ ($\mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}, \mathcal{F}(\mathfrak{a}))$ の要素で $v \in V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}} \Rightarrow \varphi[v] = 0$ を満たすもの) に対して, ある $\Phi \in \mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{F}(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))$ が存在して $\Gamma_0^\pi(\Phi) = \varphi$.

この証明については後で概略を述べる.

系 2.6. $\mathcal{A}$-加群 $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))$ のある直和因子 $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))_{\mathrm{single}}$ について

$$\Gamma_0^\pi : \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))_{\mathrm{single}} \simeq \mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}/V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}}, \mathrm{S}(\mathfrak{h})) \tag{2.3}$$

となる.

証明. 任意の $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}/V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}}, \mathrm{S}(\mathfrak{h})) = \mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}/V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}}, \mathcal{P}(\mathfrak{a})) \subset \mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}/V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}}, \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a}))$ に対して定理 2.5 により $\Gamma_0^\pi(\Phi) = \varphi$ を満たす $\Phi \in \mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{C}^\infty(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))$ が存在する. まず Φ が実は $\mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{P}(\sqrt{-1}\mathfrak{u})) = \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ に属することを示そう. φ は j 次同次, つまり, 各 $v \in V^\mathfrak{h}$ に対して $\varphi[v] \in \mathcal{P}(\mathfrak{a})$ は j 次同次多項式であるとしてよい. このとき, 各 $v \in V$ に対して(2.2) により $\Phi[v] \in \mathcal{C}^\infty(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$ が定まるので, これも j 次同次 $\mathcal{C}^\infty$ 関数である. $\mathcal{C}^\infty(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$ に属する同次関数は多項式関数しかないので $\Phi[v] \in \mathcal{P}(\sqrt{-1}\mathfrak{u})$.

命題 2.4 と合わせると,

$$\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))_{\mathrm{single}} := \{ \Phi \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g})) \ ; \ \Gamma_0^\pi(\Phi)[v] = 0 \quad \forall v \in V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}} \},$$
$$\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))_{\mathrm{double}} := \{ \Phi \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g})) \ ; \ \Gamma_0^\pi(\Phi)[v] = 0 \quad \forall v \in V^\mathfrak{h}_{\mathrm{single}} \}$$

に対して(2.3), 及び $\mathcal{A}$-加群の直和分解 $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g})) = \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))_{\mathrm{single}} \oplus \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))_{\mathrm{double}}$ が成り立つ. □

系 2.6 により条件 $V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}} = 0$ から $\Gamma_0^\pi : \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}, \mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ の全射性が導かれるが, この条件 $V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}} = 0$ は全射性の必要条件でもある :

命題 2.7. 任意の $\Phi \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))$ について, その像 $\varphi = \Gamma_0^\pi(\Phi) \in \mathrm{Hom}_W(V^\mathfrak{h}, \mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ が条件 $\varphi[V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}}] \subset \mathcal{H}_W(\mathfrak{h})$ を満たすとき, 実は $\varphi[V^\mathfrak{h}_{\mathrm{double}}] = 0$ となっている.

証明. 仮定より任意の $\alpha \in \Delta, v \in V_{-2\alpha}$ に対して $\varphi[\pi(X_\alpha)^2 v] \in \mathcal{H}_W(\mathfrak{h})$. $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}$ を α の coroot として, $\mathfrak{sl}(2)$ と同型な $\mathfrak{g}$ の部分環 $\mathfrak{sl}_\alpha(2) = \mathbb{C}\alpha^\vee + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$ を定める. $\mathfrak{h}_\alpha = \{ H \in \mathfrak{h} \ ; \ \alpha(H) = 0 \}$ とおくと, $\mathfrak{sl}_\alpha(2)$-加群の直和分解

$$\mathrm{S}(\mathfrak{g}) = \mathrm{S}(\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \oplus \sum_{\beta \neq \alpha, -\alpha} \mathrm{S}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_\beta = \Big(\mathrm{S}(\mathfrak{h}_\alpha) \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{sl}_\alpha(2))\Big) \oplus \sum_{\beta \neq \alpha, -\alpha} \mathrm{S}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_\beta$$

を得るが, このもとに $\Phi(v)$ を

$$\Phi(v) = \sum_{i=1}^n P_i Q_i + R, \qquad P_i \in \mathrm{S}(\mathfrak{h}_\alpha),\ Q_i \in \mathrm{S}(\mathfrak{sl}_\alpha(2)),\ R \in \sum_{\beta \neq \alpha, -\alpha} \mathrm{S}(\mathfrak{g})\mathfrak{g}_\beta$$

と表しておく. ここで, 各 $Q_i \in \mathrm{S}(\mathfrak{sl}_\alpha(2))$ は $\mathbb{C}\alpha^\vee$ の -2α に対する weight vector であるから 0 次と 1 次の項を持たない. このとき

$$\varphi[\pi(X_\alpha)^2 v] = \gamma_0\Big(\Phi[\pi(X_\alpha)^2 v]\Big) = \gamma_0\Big(\mathrm{ad}(X_\alpha)^2\Big(\sum_{i=1}^n P_i Q_i + R\Big)\Big) = \sum_{i=1}^n P_i \gamma_0\big(\mathrm{ad}(X_\alpha)^2 Q_i\big)$$

である. $\mathrm{ad}(X_\alpha)^2 Q_i \in \mathrm{S}(\mathfrak{sl}_\alpha(2))$ も 0 次と 1 次の項を持たず $\gamma_0\big(\mathrm{ad}(X_\alpha)^2 Q_i\big) \in \mathbb{C}[\alpha^\vee](\alpha^\vee)^2$ となるので, $\varphi[\pi(X_\alpha)^2 v] \in \mathrm{S}(\mathfrak{h})(\alpha^\vee)^2$ が得られる. 一方 $\mathfrak{a}$ 上の Laplace 作用素 $L_\mathfrak{a}$ を施して 0 となる $\mathrm{S}(\mathfrak{h})(\alpha^\vee)^2$ の要素は 0 以外にないので $\varphi[\pi(X_\alpha)^2 v] = 0$. □

定義 2.8. G の有限次表現 (π, V) が single-petaled であるとは, 条件 $V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{double}} = 0$ を満たすことと定める. これは "全ての $\alpha \in \Delta$ に対して 2α は V の weight ではない" という条件と等しい.

G の有限次表現 (π, V) が quasi-single-petaled であるとは, 条件 $V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{single}} \neq 0$ を満たすことと定める.

G の有限次表現は必ず 0-weight vector を持つので（補題 4.1）, single-petaled であれば quasi-single-petaled である. 単位表現, 随伴表現は single-petaled 表現である. 既約な single-petaled 表現の完全な分類は §4 で与える. 既約な quasi-single-petaled 表現の分類は現在のところできていないが, 高々有限個しかないことは示せる : (π, V) を既約な quasi-single-petaled 表現とすると, $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}/V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{double}}, \mathcal{H}_W(\mathfrak{h})) \setminus \{0\}$ なる要素がある. φ の次数は, $\mathcal{H}_W(\mathfrak{h})$ の要素の最高次数 d (= 正 root の数) 以下である. φ を系 2.6 により $\Phi \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{S}(\mathfrak{g}))$ に持ち上げると $\Phi \neq 0$ であり次数は d 以下である. 従って V は G-加群 $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ の d 次以下の部分のある既約成分と同型となる. そのような V は有限個しかない.

この節の残りで定理 2.5 の証明のスケッチをする. 基本的に [Da] の "$\mathcal{C}^\infty$ 級の Chevalley の制限定理" の方法に沿っている. ここでのスケッチでは条件 $\varphi|_{V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{double}}} = 0$ の必要性が見えにくいが, 実際には殆どの step でこの条件が鍵となっている.

step 1. $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}/V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{double}}, \mathcal{C}(\mathfrak{a}))$ とする. 各 $v \in V$ に対して $U \times \mathfrak{a}$ 上の連続関数 $\Phi_v(u, H)$ を

$$\Phi_v(u, H) = \varphi[p^\pi(\pi(u^{-1}))](H)$$

で定める. すると, 各 $v \in V, u, u_1 \in U, H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$\begin{cases} \Phi_v(u_1{}^{-1}u, H) = \Phi_{\pi(u_1)v}(u, H), \\ \Phi_v(uu_1, H) = \Phi_v(u, \mathrm{Ad}(u_1)H) \end{cases}$$

が成り立つ.

step 2. 実線型空間 $\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ の位相は全写像 $U \times \mathfrak{a} \ni (u, H) \mapsto \mathrm{Ad}(u)H \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}$ による商位相と同じである. 従って各 $v \in V$ に対して $\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ 上の連続関数 $\Phi[v](X)$ が一意的に定まり,

$$\Phi[v](\mathrm{Ad}(u)H) = \Phi_v(u, H), \qquad \forall (u, H) \in U \times \mathfrak{a}$$

が成り立つ．写像 $V \ni v \mapsto \Phi[v]$ は $\mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{C}(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))$ に属し，$\Gamma_0^\pi(\Phi) = \varphi$ となる．従って $\mathcal{F} = \mathcal{C}$ の場合に定理を示すことができた．

step 3. $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}/V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{double}}, \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a}))$ とすと，これは $\mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{C}(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))$ の要素 Φ に持ち上がる．$(\sqrt{-1}\mathfrak{u})_{\mathrm{reg}}, \mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}$ でそれぞれ $\sqrt{-1}\mathfrak{u}, \mathfrak{a}$ の正則元全体からなる開集合を表すと，上の構成により各 $v \in V$ について $\Phi[v]|_{(\sqrt{-1}\mathfrak{u})_{\mathrm{reg}}} \in \mathcal{C}^\infty((\sqrt{-1}\mathfrak{u})_{\mathrm{reg}})$ である．各 $\xi \in \mathfrak{a}$ に対して有理型 Dunkl 作用素とよばれる $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})$ や $\mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}})$ に作用する微分差分作用素

$$\mathcal{T}_\xi = \partial(\xi) + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha(\xi) \frac{1 - r_\alpha}{\alpha(H)}, \qquad H \in \mathfrak{a}$$

を定義する．但し，記号 $r_\alpha \in W$ は $\alpha \in \Delta$ に関する鏡映を表すとする．$\{\xi_1, \ldots, \xi_\ell\}$ を $\mathfrak{a}$ の正規直交基底として " Laplace 作用素 "

$$L_{\mathcal{T}} = L_{\xi_1}^2 + \cdots + L_{\xi_\ell}^2$$

を定めると

$$L_{\sqrt{-1}\mathfrak{u}}\left(\Phi[v]|_{(\sqrt{-1}\mathfrak{u})_{\mathrm{reg}}}\right)\Big|_{\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}} = \Big(L_{\mathcal{T}}\big(\varphi[v]\big)\Big)\Big|_{\mathfrak{a}_{\mathrm{reg}}}, \qquad \forall v \in V^{\mathfrak{h}}$$

となる．この右辺について，

$$V^{\mathfrak{h}} \ni v \mapsto L_{\mathcal{T}}\big(\varphi[v]\big) \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a})$$

は $\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}/V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{double}}, \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a}))$ に属する．これを $L_{\mathcal{T}}(\varphi)$ と記す．

step 4. $\varphi \in \mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}/V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{double}}, \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{a}))$ に対応する $\Phi \in \mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{C}(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))$ を $\varphi^\sim$ と記す．任意の $v \in V$ に対して，連続関数 $\varphi^\sim[v]$ に $L_{\sqrt{-1}\mathfrak{u}}$ を distribution の意味で作用させると

$$L_{\sqrt{-1}\mathfrak{u}}(\varphi^\sim[v]) = \Big(L_{\mathcal{T}}(\varphi)\Big)^\sim[v]$$

となり，結果も $\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ 上の連続関数になる．ここで Weyl の補題を繰り返し適用すると，

$$\varphi^\sim = \Phi \in \mathrm{Hom}_U(V, \mathcal{C}^\infty(\sqrt{-1}\mathfrak{u}))$$

が得られる． □

3 Harish-Chandra 同型

この節では定理 2.1⇝ 定理 1.1 の意味で §2 の諸結果を量子化（非可換化）する．G-加群を $\mathrm{S}(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ とするのであるが，実は W-加群 $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ の方も modify する必要がある．

定理 1.1 で $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ と同一視された $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ も $\mathcal{A}$ と記す．$\mathfrak{g}$-加群として $\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{g})$ である．また，§2 で述べたことより G の任意の有限次表現 (π, V) に対して $\mathrm{Hom}_W(V, \mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ は階数が $\dim V^{\mathfrak{h}}$ に等しい自由 $\mathcal{A}$-加群となる．§1 で定義した Harish-Chandra 写像 γ について

$$\gamma(ZD) = \gamma(DZ) = \gamma(Z)\gamma(D) \qquad \forall Z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}),\ \forall D \in \mathrm{U}(\mathfrak{g})$$

が成り立つので，以下のような $\mathcal{A}$-準同型が定義できる：

定義 3.1. $\mathcal{A}$-準同型 $\Gamma^\pi : \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \ni \Psi \mapsto \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\mathfrak{h}}, \mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ を

$$\psi \ : \ V^{\mathfrak{h}} \hookrightarrow V \xrightarrow{\Psi} \mathrm{U}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{S}(\mathfrak{h})$$

で定める.

命題2.4の Γ_0^π の単射性から Γ^π の単射性が導かれる. Γ^π の像は必ずしも $\mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}, \mathrm{S}(\mathfrak{h}))$ に含まれない. ある場合には Γ^π の像が W-不変性を持つように, $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ への W の作用を退化 Hecke 環を用いて変形しよう.

$\mathbb{C}$-線型環は全て単位元を持つこととし, $\mathbb{C}$-線型環の準同型は単位元を単位元に移すものと考える. $\Delta, W, \mathfrak{h}$ のデータに対する退化 Hecke 環を導入する:

定義 3.2 (退化 Hecke 環). $k \in \mathbb{C}$ をパラメタとする. $\mathbb{C}$-線型環 $\mathbf{H}_k$, および2つの $\mathbb{C}$-線型環の準同型 $\iota_1 : \mathbb{C}[W] \to \mathbf{H}_k$, $\iota_2 : \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \to \mathbf{H}_k$ で

$$\iota_1(r_\alpha)\iota_2(H) = \iota_2(r_\alpha(H))\iota_1(r_\alpha) - k\alpha(H) \qquad \forall\alpha \in \Pi,\ \forall H \in \mathfrak{h}$$

を満たすもので次の普遍性を満たす3つ組 $(\mathbf{H}_k, \iota_1, \iota_2)$ を考える:

(普遍性) $\mathbb{C}$-線型環 A, および2つの $\mathbb{C}$-線型環の準同型 $f_1 : \mathbb{C}[W] \to A$, $f_2 : \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \to A$ で

$$f_1(r_\alpha)f_2(H) = f_2(r_\alpha(H))f_1(r_\alpha) - k\alpha(H) \qquad \forall\alpha \in \Pi,\ \forall H \in \mathfrak{h}$$

を満たすものに対して, $f : \mathbf{H}_k \to A$ なる $\mathbb{C}$-線型環の準同型で $f_1 = f \circ \iota_1, f_2 = f \circ \iota_2$ となるものが唯一つ存在する.

この $\mathbf{H}_k$ (正確には3つ組 $(\mathbf{H}_k, \iota_1, \iota_2)$) を退化 Hecke 環という.

退化 Hecke 環について次は既知 ([Op] 等参照):

命題 3.3 ($\mathbf{H}_k$ の構造). ι_1, ι_2 は単射である. 従って $\mathbb{C}[W], \mathrm{S}(\mathfrak{h})$ を $\mathbf{H}_k$ の部分環と同一視する. このとき環の積構造による自然な同型:

$$\mathbf{H}_k \simeq \mathbb{C}[W] \otimes \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}[W]$$

が成り立つ. 環としての中心 $\mathrm{Z}(\mathbf{H}_k)$ は $\mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ に等しい. $k \neq 0$ に対する $\mathbf{H}_k$ は全て互いに同型となる. 一方, $\mathbf{H}_0 \simeq \mathbb{C}[W] \ltimes \mathrm{S}(\mathfrak{h})$ である.

以下では $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{-1}$ とおき, $k = -1$ の場合のみを考える. 左 $\mathbf{H}$-加群 $\mathbf{H} / \sum_{w \in W} \mathbf{H}(w-1)$ は左 $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$-加群として

$$\mathbf{H} / \sum_{w \in W} \mathbf{H}(w-1) = \Big(\mathrm{S}(\mathfrak{h}) \oplus \sum_{w \in W} \mathrm{S}(\mathfrak{h})(w-1)\Big) / \sum_{w \in W} \mathrm{S}(\mathfrak{h})(w-1) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h})$$

であるが, この同一視により $\mathbf{H}$-加群とみなした $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ を $\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})$ と表す. $\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})$ には $W \subset \mathbb{C}[W] \subset \mathbf{H}$ が作用するが, これは $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ に対する通常の W の作用とは異なる. そこで $w \in W$ の作用が $\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})$ に対するものであることを強調するときには記号 $\overline{w}$ を用いる.

補題 3.4. 各 $\alpha \in \Pi$ に対して,

$$\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})^{+r_\alpha} = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_{\ell-1}, (\alpha^\vee)^2],$$
$$\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})^{-r_\alpha} = \mathbb{C}[H_1, \ldots, H_{\ell-1}, (\alpha^\vee)^2](\alpha^\vee - 1)$$

が成り立つ. ここで $\{H_1, \ldots, H_{\ell-1}\}$ は $\mathfrak{h}_\alpha = \{H \in \mathfrak{h}\ ;\ \alpha(H) = 0\}$ の任意の基である. 従って特に $\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})^W = \mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ が成り立つ.

証明. $\mathbf{H}$ の要素間の関係式：

$$r_\alpha(\alpha^\vee - 1) = -\alpha^\vee r_\alpha + \alpha(\alpha^\vee) - 1 \equiv -(\alpha^\vee - 1) \mod \sum_{w\in W} \mathbf{H}(w-1),$$
$$r_\alpha(\alpha^\vee)^2 = (\alpha^\vee)^2 r_\alpha,$$
$$r_\alpha H_i = H_i r_\alpha \qquad (i = 1, \ldots \ell - 1)$$

による. □

以下 $\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})$ を $\mathrm{S}(\mathfrak{h})$ の量子化として扱うのであるが，両者は写像

$$\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h}) \ni f \mapsto \frac{1}{\#W} \sum_{w\in W} w^{-1}\overline{w} f \in \mathrm{S}(\mathfrak{h}) \tag{3.1}$$

により $\mathcal{A}$-加群として，あるいは W-加群として同型となる．この同型写像は最高次の項を変えない.

命題 3.5. $\Psi \in \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ に対して，$\overline{\psi} = \Gamma^\pi(\Psi)|_{V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{single}}}$ は $V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{single}}$ から $\mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})$ への W-準同型となる．従って $\mathcal{A}$-加群の準同型：

$$\overline{\Gamma}^\pi : \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{single}}, \mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h}))\ ;\ \Psi \mapsto \overline{\psi}$$

を定義することができる.

証明. 各 $\alpha \in \Pi$ について次をいえばよい：

$$\overline{\psi}[r_\alpha v] = \overline{r_\alpha}\Big(\overline{\psi}[v]\Big) \qquad \forall v \in V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{single}}.$$

命題 2.7 の証明の $\mathfrak{sl}_\alpha(2), \mathfrak{h}_\alpha$ を用いる．0-weight $v \in V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{single}}$ は $\pi(X_\alpha)^2 v = 0$ を満たすので，$\mathfrak{sl}_\alpha(2)$-加群 $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_\alpha(2))v$ は highest weight が $0, \alpha$ である 2 つの既約表現に対する isotypic component に分解する．v のそれぞれの component への分解を $v = v_0 + v_1$ とすると，$r_\alpha v_0 = v_0, r_\alpha v_1 = -v_1$ である．$\mathfrak{n}_\alpha = \sum_{\beta\in\Delta^+\setminus\{\alpha\}} \mathfrak{g}_\beta$，$\overline{\mathfrak{n}}_\alpha = \sum_{-\beta\in\Delta^+\setminus\{\alpha\}} \mathfrak{g}_\beta$ とおくと，射影

$$\gamma_\alpha : \mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{U}(\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \oplus \big(\overline{\mathfrak{n}}_\alpha \mathrm{U}(\mathfrak{g}) + \mathrm{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_\alpha\big) \to \mathrm{U}(\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \simeq \mathrm{S}(\mathfrak{h}_\alpha) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{sl}_\alpha(2))$$

は $\mathfrak{sl}_\alpha(2)$-準同型であり，$\gamma \circ \gamma_\alpha = \gamma_\alpha$ が成り立つ．$\mathrm{S}(\mathfrak{h}_\alpha)$ には $\mathfrak{sl}_\alpha(2)$ が自明に作用し，highest weight が $0, \alpha$ である既約表現に対する $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_\alpha(2))$ の isotypic component はそれぞれ $\mathrm{Z}(\mathfrak{sl}_\alpha(2)), \mathrm{Z}(\mathfrak{sl}_\alpha(2))\mathfrak{g}_\alpha$ であるから，$\gamma_\alpha \circ \Psi(v_\nu)$ $(\nu = 0, 1)$ を

$$\gamma_\alpha \circ \Psi(v_0) = \sum_{i=1}^{n} P_i D_i, \quad \gamma_\alpha \circ \Psi(v_1) = \sum_{i=1}^{n'} P'_i D'_i \alpha^\vee, \quad P_i, P'_i \in \mathrm{S}(\mathfrak{h}_\alpha), \quad D_i, D'_i \in \mathrm{Z}(\mathfrak{sl}_\alpha(2))$$

と表すことができる．従って

$$\overline{\psi}[v_0] = \gamma\Big(\sum_{i=1}^{n} P_i D_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P_i \gamma(D_i), \quad \overline{\psi}[v_1] = \gamma\Big(\sum_{i=1}^{n'} P'_i D'_i \alpha^\vee\Big) = \sum_{i=1}^{n'} P'_i \gamma(D'_i)\alpha^\vee$$

であるが，γ の $\mathfrak{sl}_\alpha(2)$ への制限は $\mathfrak{sl}_\alpha(2)$ の Harish-Chandra 写像と一致するので $\gamma(D_i), \gamma(D'_i) \in \mathbb{C}[(\alpha^\vee)^2]$ となる．従って補題 3.4 より $\overline{r_\alpha}\overline{\psi}[v_0] = \overline{\psi}[v_0]$，$\overline{r_\alpha}\overline{\psi}[v_1] = -\overline{\psi}[v_1]$ を得る. □

注意 3.6. $V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{single}}$ が命題 3.5 を成立させるような W-加群 $V^{\mathfrak{h}}$ の最大の部分加群であることを示すことも

命題 3.5 と系 2.6 より，本稿の主結果が得られる：

定理 3.7 (一般化された Harish-Chandra 同型). (π, V) が single-petaled であるとき，$\mathcal{A}$-加群の同型

$$\Gamma^{\pi} : \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \simeq \mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}, \mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h}))$$

が成り立つ．

注意 3.8. $(\pi, V) = (\mathrm{triv}, \mathbb{C})$ のとき，$\mathrm{Hom}_G(\mathbb{C}, \mathrm{U}(\mathfrak{g})) \simeq \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$，$\mathrm{Hom}_W(\mathbb{C}, \mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})) \simeq \mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h})^W = \mathrm{S}(\mathfrak{h})^W$ であるから $\Gamma^{\mathrm{triv}} = \gamma$．つまり，定理 3.7 は定理 1.1 の自然な拡張である．

筆者は系 2.6 の非可換版である次を予想している：

予想 3.9. 一般の (π, V) に対して $\mathcal{A}$-加群 $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{U}(\mathfrak{g}))$ にある直和因子 $\mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{U}(\mathfrak{g}))_{\mathrm{single}}$ が存在して

$$\Gamma^{\pi} : \mathrm{Hom}_G(V, \mathrm{U}(\mathfrak{g}))_{\mathrm{single}} \simeq \mathrm{Hom}_W(V^{\mathfrak{h}}/V^{\mathfrak{h}}_{\mathrm{double}}, \mathrm{S}_{\mathbf{H}}(\mathfrak{h}))$$

となる．

4 single-petaled 表現

この節では一般化された Harish-Chandra 同型（定理 3.7）が成り立つ single-petaled 表現を各複素単純 Lie 環について具体的に列挙する．

まず，一般の複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を extremal weight に持つ既約有限次表現 π_λ の weight 全体の集合 $\mathcal{W}(\lambda)$ について考察する．次は比較的良く知られている：

補題 4.1. $\mathcal{W}(\lambda) = (\lambda - \mathbb{N}\Delta^+) \cap \overline{W\lambda} = (\lambda + \mathbb{Z}\Delta) \cap \overline{W\lambda}$．ここで $\overline{W\lambda}$ は λ の W-軌道の凸包とする．

$\mathfrak{g}$ の内部自己同型群 G の既約有限次表現は，$\mathfrak{g}$ の既約有限次表現で highest weight が root lattice $\mathbb{Z}\Delta$ に属するものであるから，必ず 0-weight を持つ．$\mathfrak{h}^*$ に半順序

$$\lambda \leq \mu \Leftrightarrow \mu - \lambda \in \mathbb{N}\Delta^+$$

を導入する．$\mathcal{Q}^+ = \{\lambda \in \mathbb{Z}\Delta \ ; \ \text{dominant}\}$ とする．

補題 4.2. $\lambda \in \mathcal{Q}^+$，$\lambda \leq \mu$ のとき $\lambda \in \mathcal{W}(\mu)$．

<u>証明</u>. $\Pi=\{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ とすと，

$$\lambda = n_1\alpha_1 + \cdots + n_\ell\alpha_\ell, \qquad \mu = m_1\alpha_1 + \cdots + m_\ell\alpha_\ell \qquad n_1 \leq m_1, \ldots, n_\ell \leq m_\ell$$

とできる．$\delta(\mu - \lambda) = |n_1 - m_1| + \cdots + |n_\ell - m_\ell|$ に関する帰納法で示す．$\delta(\mu - \lambda) = 0$ のときは明らか．$\delta(\mu - \lambda) > 0$ のとき，ある $i = 1, \ldots \ell$ について $\langle \mu - \lambda, \alpha_i \rangle > 0$，従って $\langle \mu, \alpha_i \rangle > \langle \lambda, \alpha_i \rangle \geq 0$ となる．このとき $\mu - \alpha_i \geq \lambda$ であるから帰納法の仮定より $\lambda \in \mathcal{W}(\mu - \alpha_i)$．一方補題 4.1 より $\mu - \alpha_i \in \mathcal{W}(\mu)$，従って $\mathcal{W}(\mu - \alpha_i) \subset \mathcal{W}(\mu)$ であるから，$\lambda \in \mathcal{W}(\mu)$ が得られる．□

以下では $\mathfrak{g}$ は複素単純 Lie 環とする．

補題 4.3. 短い dominant root α_s が唯一つ存在する．α_s は集合 $\mathcal{Q}^+ \setminus \{0\}$ の半順序 $\leq$ に関する最小元

証明. $\lambda \in \mathcal{Q}^+ \setminus \{0\}$ を highest weight とする有限次既約表現 π_λ に対して $0 \in \mathcal{W}(\lambda)$ であるが，π_λ は単位表現ではないのである $\alpha \in \Delta$ に対して $\alpha \in \mathcal{W}(\lambda)$ である．$\mathcal{W}(\lambda)$ は W-不変なのでこの α は dominant としてよい．α が短い root であればそれ以下の長さの root がないので

$$\alpha(\beta^\vee) \in \{0,1\} \qquad \forall\beta \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\} \tag{4.1}$$

が成り立つ．また α が条件(4.1) を満たさなければ，補題 4.1 より $\mathcal{W}(\alpha)$ は α より短い dominant root α' を含む．この場合 $\alpha' \in \mathcal{W}(\alpha) \subset \mathcal{W}(\lambda)$ を改めて α とすることにより，最初から(4.1) は成り立つと仮定してよい．一方 α_s を（1 つの）短い dominant root とすると(4.1) と同様の

$$\alpha_s(\beta^\vee) \in \{0,1\} \qquad \forall\beta \in \Delta^+ \setminus \{\alpha_s\} \tag{4.2}$$

が成り立つ．$\alpha_s \neq \alpha$ と仮定して矛盾を導こう．$\alpha = m_1\alpha_1 + \cdots + m_\ell\alpha_\ell$ とすると，α が dominant であること，$\mathfrak{g}$ が単純であることから $m_1, \ldots, m_\ell$ は全て正整数となる．α_s についても同様であるから，(4.1), (4.2) より $\alpha(\alpha_s{}^\vee) = \alpha_s(\alpha^\vee) = 1$ が得られる．従って $\mu = \alpha - \alpha_s$ に対して

$$\mu(\beta^\vee) \in \{0, \pm 1\} \qquad \forall\beta \in \Delta$$

が成り立つ．この条件は W-不変なので各 $\mu' \in W\mu$ に対しても成り立つ．また，凸包の性質より各 $\mu' \in \mathcal{W}(\mu)$ に対しても成り立つ．ところが $\mu \neq 0$ であるから，上と同様に $\beta_1 \in \mathcal{W}(\mu)$ となる $\beta_1 \in \Delta$ が存在し矛盾となる．以上より α_s が unique であること，$\mathcal{W}(\lambda)$ が α_s を含むことが示された． □

命題 4.4. G の有限次表現 (π, V) について次は同値：

(a) (π, V) は single-petaled 表現.

(b) $\mu \neq 0$ が weight であるとき，2μ は weight ではない.

(c) $2\alpha_s$ は weight ではない.

証明. (b)⇒(a)⇒(c) は明らかなので，(c)⇒(b) を示す：$\mu, 2\mu \neq 0$ がともに weight であるとする．補題 4.3 より $\alpha_s \in \mathcal{W}(\mu)$ であるから，補題 4.1 より $2\alpha_s \in \mathcal{W}(2\mu)$ となる． □

命題 4.4，補題 4.2 より，既約な single-petaled 表現の分類は $2\alpha_s \not\leq \lambda$ となる $\lambda \in \mathcal{Q}^+$ の分類に帰着される．詳しい議論は省略するが，以下にこの原理を用いて分類した各型の既約な single-petaled 表現を列挙する．

$(A_{\ell-1})$ 型

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell) \hookrightarrow \mathfrak{gl}(\ell)$ とする．Cartan 部分環の双対の基 $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell\}$ 等は [Bo] の標準的な設定を用いる（以降も同様）．

命題 4.5 (Kostant [Ko2]). ℓ の分割:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{N}^\ell, \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell \geq 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell = \ell.$$

に，$\mathfrak{gl}(\ell)$ の highest weight $\lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_\ell\varepsilon_\ell$ の既約表現 (π_λ, V_λ) を対応させる．$(\pi_\lambda^*, V_\lambda^*)$ はその双対表現とする．これらを $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(\ell)$ の表現 $(\pi_\lambda|_\mathfrak{g}, V_\lambda)$ とみなすと

$$(V_\lambda)^\mathfrak{h} \simeq (V_\lambda^*)^\mathfrak{h} \simeq \sigma_{{}^t\lambda}.$$

ここで $\sigma_{{}^t\lambda}$ は λ の転置に対応する $W = \mathfrak{S}_\ell$ の既約表現である．

定理 4.6. (a) $(\pi_\lambda|_{\mathfrak{g}}, V_\lambda)$ と $(\pi_\lambda^*|_{\mathfrak{g}}, V_\lambda^*)$ は single-petaled であり，他に既約な single-petaled 表現はない.

(b) $(\pi_\lambda|_{\mathfrak{g}}, V_\lambda) \simeq (\pi_\lambda^*|_{\mathfrak{g}}, V_\lambda^*)$ であるのは，highest weight が

$$\underbrace{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_j}_{j} - \underbrace{\varepsilon_{\ell-j+1} - \cdots - \varepsilon_\ell}_{j}, \qquad j = 0, 1, \ldots \left[\frac{\ell}{2}\right]$$

のものに限られる.

(B_ℓ) 型

定理 4.7. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2\ell+1)$ とする. $\lambda = \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_\ell\varepsilon_\ell$ を highest weight とする既約表現 (π_λ, V_λ) が single-petaled である場合の $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ は下表にまとめられる：

λ_1	λ_2	λ_3	$\cdots$	λ_ℓ	具体的な実現
0	0	0	$\cdots$	0	triv
1	0	0	$\cdots$	0	$V^{\natural}$ （自然表現）
1	1	0	$\cdots$	0	$\bigwedge^2 V^{\natural}$ (随伴表現)
1	1	1	$\cdots$	0	$\bigwedge^3 V^{\natural}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	$\cdots$	1	$\bigwedge^\ell V^{\natural}$

$(C_\ell), (D_\ell)$ 型

定理 4.8. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(\ell)$ 又は $\mathfrak{so}(2\ell)$ とする. ℓ が奇数のとき，$\lambda = \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_\ell\varepsilon_\ell$ を highest weight とする既約表現 (π_λ, V_λ) が single-petaled である場合の $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ は下表にまとめられる（ℓ が偶数のときも同様)：

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	$\cdots$	$\lambda_{\ell-2}$	$\lambda_{\ell-1}$	λ_ℓ
0	0	0	0	$\cdots$	0	0	0
2	0	0	0	$\cdots$	0	0	0
1	1	0	0	$\cdots$	0	0	0
2	1	1	0	$\cdots$	0	0	0
1	1	1	1	$\cdots$	0	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2	1	1	1	$\cdots$	1	0	0
1	1	1	1	$\cdots$	1	1	0
2	1	1	1	$\cdots$	1	1	± 1

ただし，右下の $\pm$ は (D_ℓ) 型の場合のみ $-$ をとることとする.

定理 4.9. 例外型の複素単純 Lie 環の既約な single-petaled 表現に対する highest weight は以下：

$$\begin{array}{lcl} (E_6) & : & 0,\ \omega_2,\ \omega_1+\omega_6,\ \omega_4, \omega_5+\omega_6,\ 3\omega_6,\ \omega_1+\omega_3,\ 3\omega_1 \\ (E_7) & : & 0,\ \omega_1,\ \omega_6,\ 2\omega_7,\ \omega_3,\ \omega_2+\omega_7 \\ (E_8) & : & 0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_7,\ \omega_8 \\ (F_4) & : & 0,\ \omega_1,\ \omega_3,\ \omega_4 \\ (G_2) & : & 0,\ \omega_1,\ \omega_2 \end{array}$$

ここで ω_i は基本 weight を表す（[Bo] 参照）.

参考文献

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 7 et 8, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1975.

[Da] J. Dadok, *On the C^∞ Chevalley theorem*, Adv. in Math. **44**(1982), 121–131.

[Du] C. F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **311**(1989), 167–183.

[Dx] J. Dixmier, *Algèbres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[He] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, 1984.

[Kn] A. W. Knapp, *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, 1986.

[Ko1] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85**(1963), 327–404.

[Ko2] B. Kostant, *On Macdonald's η-function formula, the Laplacian and generalized exponents*, Adv. in Math. **20**(1975), 257–285.

[KR] B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and Lie group representations associated to symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93**(1971), 753–809.

[Ma] H. Matsumoto, *Enveloping algebra* 入門, Lectures in Mathematical Sciences The University of Tokyo 11, 1995.

[Op] E. Opdam, *Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras*, Acta Math. **175**(1995), no. 1, 75–121.